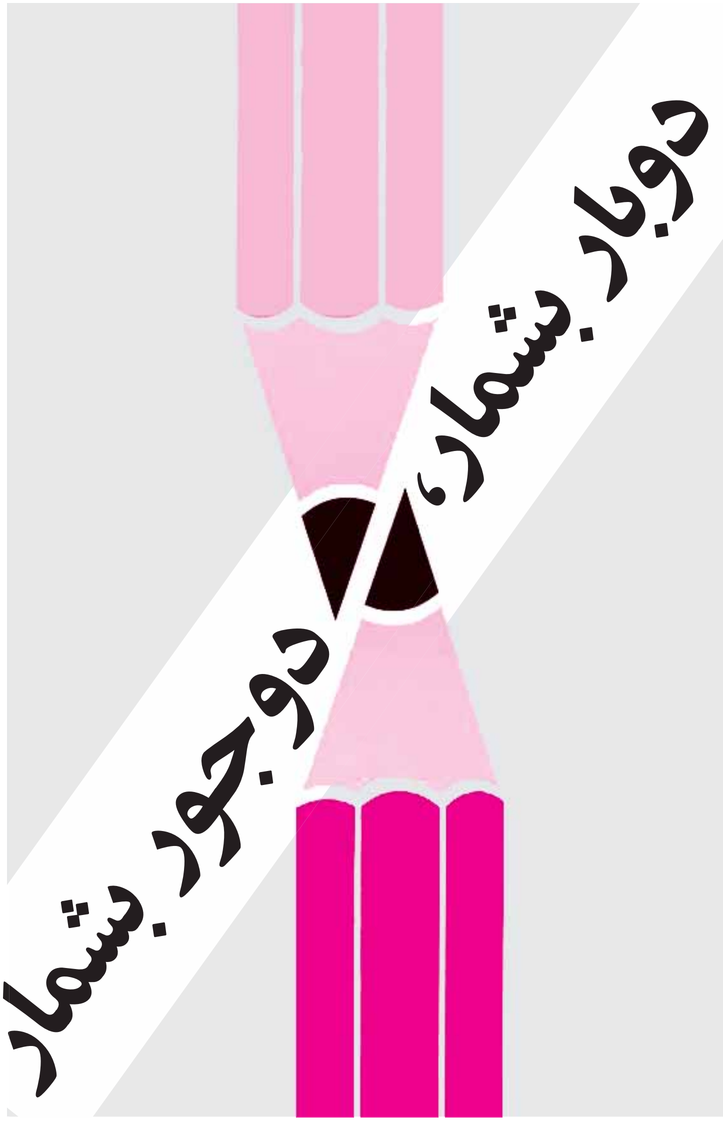
دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



فرض کنید یک مســئلهٔ شمارشی را حل کرده‌اید و به عدد N رسیده‌اید. اما مطمئن نیستید و می‌خواهید پاسخ خود را به طریقی ارزیابی کنید. چه راهی پیشــنهاد می‌کنید؟ یک راه برای اطمینان از درســتی پاسخ این اســت که مراحل حل را مجدداً بررسی کنید تا مطمئن شــوید که در هیچ مرحله‌ای اشتباه نداشته‌اید. راه دیگر آن است که سعی کنید، مســئله را از روش دیگری حل کنید. اگر از روش دیگری دوباره به عدد N برسید، اطمینان پیدا می‌کنید که پاسخ درست است. مسئلهٔ زیر را از دو روش حل کنید.

مسئلهٔ۱: بــه چند طریق می‌توان از میان ۱۰ ورزشکار، یک تیم ۵ نفــره انتخاب کرد، به‌طوری که یکی از اعضای تیم به عنوان کاپیتان انتخاب شود؟ قبل از خواندن راه‌حل‌ها، سعی کنید از دو روش مسئله را حل کنید.

راه‌حل اول: ابتدا اعضای تیم را انتخاب می‌کنیم (به $\binom{۱۰}{۵}$ طریق) و ســپس یکی از اعضای تیم را به عنوان کاپیتان انتخاب می‌کنیم (به ۵ طریق). در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $N_۱=۵\binom{۱۰}{۵}$.

راه‌حل دوم: ابتدا کاپیتان تیــم را انتخاب می‌کنیم (به ۱۰ طریق) و ســپس بقیهٔ اعضای تیــم را انتخاب می‌کنیم (به $\binom{۹}{۴}$ طریق). در نتیجه پاسخ مسئله برابر $N_۲=۱۰\binom{۹}{۴}$ خواهد بود.

بــا محاســبهٔ مقادیــر $N_۱$ و $N_۲$ خواهیــد دیــد که: $N_۱=N_۲=۱۲۶۰$ و نشــان از درســتی هر دو راه‌حل دارد. مسئلهٔ بعد را با الهام گرفتن از دو راه‌حل مسئلهٔ ۱ حل کنید.

مسئلهٔ۲: برای هر دو عــدد طبیعی n و k، با فرض $۱\leq k\leq n$، اتحاد ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱}$$

آیا می‌توان با طرح یک مسئلهٔ شمارشی و شمارش از دو طریق به اتحاد فوق رســید؟ قطعاً پاسختان مثبت است و توانسته‌اید مســئله‌ای شمارشی طرح کنید که پاسخ آن دو طرف اتحاد فوق باشد. روش فوق در اثبات اتحادهــای ترکیبیاتی را «روش شــمارش مضاعف» یا «دوگونه شــمردن» می‌نامیم. سعی کنید مسئلهٔ ۳ را با همین روش حل کنید.

مسئلهٔ۳: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$۱\binom{n}{۱}+۲\binom{n}{۲}+\dots+n\binom{n}{n}=n.۲^{n-۱}$$

اثبات: باید مسئله‌ای شمارشی طرح کنیم که پاسخ آن برابر با دو طرف تساوی باشد. با توجه به جملات سمت چپ تساوی، انتخاب تیم و کاپیتان می‌تواند گزینهٔ مناسبی باشد: می‌خواهیم از میان n دانش‌آموز، یک تیم (حداقل ۱ نفره) با یک سرگروه (عضوی از تیم) انتخاب کنیم. به دو طریق می‌توان این شمارش را انجام داد. ابتدا تیم و سپس سرگروه تیم را انتخاب می‌کنیم. اگر تیم k نفره باشد ($۱\leq k\leq n$)، $\binom{n}{k}$ انتخاب برای تیم و k انتخاب برای سرگروه وجود دارد. پس برای انتخاب تیم و ســرگروه در مجمــوع $N_۱=۱\binom{n}{۱}+۲\binom{n}{۲}+\dots+n\binom{n}{n}$ انتخاب

وجود دارد.

روش دوم آن است که ابتدا سرگروه و سپس بقیهٔ اعضای تیم را انتخاب کنیم. برای انتخاب سرگروه n انتخاب و برای انتخاب دیگر اعضای تیم 2^{n-1} انتخاب وجود دارد.

(تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n-1 عضوی)

در نتیجه در این روش شمردن به پاسخ $N_2 = n \times 2^{n-1}$ می‌رسیم. چون یک مسئله را از دو روش حل کرده‌ایم، پاسخ‌های نهایی باید برابر باشند. در نتیجه: $N_1=N_2$ و حکم ثابت می‌شود.

دقت کنید که برای اثبات این اتحاد و اتحادهایی شبیه به آن راه‌حل‌های دیگری نیز وجود دارد که یافتن آن‌ها خالی از لطف نیست. به‌طور خاص برای این اتحاد حداقل چهار راه‌حل دیگر وجود دارد. سعی کنید مسائل زیر را با روش شمارش مضاعف حل کنید. راهنمایی این مسئله‌ها در پایان مقاله آمده است.

مسئله ۴: (اتحاد پاسکال) برای هر دو عدد طبیعی n و k که $k \le n$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

مسئله ۵: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1+2+\ldots+n = \binom{n+1}{2}$$

مسئله ۶: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1} = 2^n+1$$

مسئله ۷: (اتحاد واندرموند) برای هر سه عدد طبیعی n، m و k با فرض $k \le m$ و $k \le n$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \ldots + \binom{n}{0}\binom{m}{k} = \binom{n+m}{k}$$

گاهی در حل مسئله‌های شمارشی استفاده از روش شمارش مضاعف می‌تواند گره مسئله را باز کند و با تغییر روش شمردن به پاسخ مسئله برسیم. مسئلهٔ بعد نمونه‌ای از این‌گونه مسئله‌هاست.

مسئله ۸: در یک مهمانی ۱۰ نفر حضور دارند و هر نفر دقیقاً با ۴ نفر آشناست. برای دو شخص x و y، شخص z را میانجی می‌نامیم هرگاه z با هر دو آشنا باشد (x و y می‌توانند آشنا یا ناآشنا باشند). برای هر دو نفر از این افراد تعداد میانجی‌ها را یادداشت کرده‌ایم. مجموع کل این عددها را به‌دست آورید (تعداد این عددها برابر است با $\binom{10}{2}$ یعنی ۴۵ عدد).

راه‌حل: در صورت مسئله برای هر دو نفر تعداد میانجی‌ها محاسبه و سپس مجموع این عددها خواسته شده است. مشکل اینجاست که هر نفر با ۴ نفر آشناست، اما ما نمی‌دانیم هر دو نفر چند آشنای مشترک ممکن است داشته باشند. تعداد آشنایان مشترک بین دو نفر می‌تواند عددی از صفر تا ۴ باشد. اما بیایید نحوهٔ شمارش را تغییر دهیم. به جای آنکه برای هر دو نفر تعداد میانجی‌ها را بشماریم، ببینیم هر نفر میانجی چند زوج خواهد بود. مجموع خواسته شده با مجموع عددهایی که برای این ۱۰ نفر به‌دست می‌آید برابر خواهد بود. هر نفر با ۴ مهمان دیگر آشناست. در نتیجه برای $\binom{4}{2}$ زوج می‌تواند میانجی باشد. پس هر نفر می‌تواند دقیقاً برای ۶ زوج میانجی باشد. بنابراین مجموع تعداد «زوج ـ میانجی»ها برابر است با: $S=10\times 6$. یعنی: $S=60$.

در حل مسئلهٔ فوق، در واقع مجموع تعداد میانجی‌ها برای هر زوج با مجموع تعداد زوج‌هایی که هر شخص می‌توانست میانجی آن‌ها باشد، یکسان است.

برای آشنایی بیشتر شما مسئلهٔ دیگری مطرح می‌کنیم.

مسئله ۹: در یک بیمارستان ۹ پرستار مشغول به‌کار هستند (بخش اورژانس). هر شب سه پرستار کشیک هستند و برنامهٔ آن‌ها ۱۲ روزه است. برنامه‌ریزی تیم‌های کشیک به گونه‌ای است که هر دو پرستار با هم در تعداد یکسانی از شب‌ها کشیک هستند. اولاً مشخص کنید هر دو پرستار دقیقاً در چند شب با هم عضو تیم کشیک هستند؟ سپس تعیین کنید: هر پرستار چند شب عضو تیم کشیک خواهد بود؟

راه‌حل: فرض کنید هر دو پرستار در m شب با هم کشیک بوده‌اند. آن‌گاه تعداد زوج پرستارهای کشیک در کل ۱۲ شب برابر است با: $N_1 = 12\binom{3}{2} = 36$. اما می‌توانیم این تعداد را به گونه‌ای دیگر بشماریم. هر دو نفر دقیقاً mبار با هم کشیک بوده‌اند. در نتیجه تعداد کل زوج پرستارهای کشیک (در یک شب) برابر است با: $N_2 = \binom{9}{2}m$. در نتیجه $36 = N_1 = N_2 = \binom{9}{2}m$ که نتیجه می‌دهد: $m=1$. یعنی هر دو پرستار دقیقاً در یک شب با هم کشیک بوده‌اند. برای حل قسمت دوم کافی است به این نکته توجه کنیم که هر پرستار با هشت پرستار دیگر و در هر نوبت با ۲ پرستار تیم کشیک را تشکیل می‌دهند. پس هر پرستار $\frac{8}{2}=4$ شب پرستار کشیک بوده است.

سعی کنید مسئلهٔ بعد را همانند مسئله‌های ۸ و ۹ خودتان حل کنید.

مسئلهٔ ۱۰: در یک دوره از مسابقات ورزشی، ۱۰ ورزشکار از کشور A و ۶ ورزشکار از کشور B حضور دارند. می‌دانیم که در هر مسابقه یک تیم دونفره از A با یک تیم دونفره از B مسابقه می‌دهند. اگر هر دو نفر از A در قالب یک تیم دقیقاً در ۶ مسابقه شرکت کرده باشند، تعداد کل مسابقات را به‌دست آورید. اگر بدانیم هر تیم از B، در تعداد یکسانی از مسابقات مانند m مسابقه شرکت داشته است، مقدار m را به‌دست آورید. با این مفروضات، هر ورزشکار از A و هر ورزشکار از B در چند مسابقه شرکت کرده است؟

ممکن است به کمک شمارش مضاعف به جای یک تساوی، به یک نامساوی برسید. در واقع در روش اول شمارش، تعداد اعضای یک مجموعه را دقیق و در روش دوم شمارش، تعداد اعضای همان مجموعه را نادقیق و با به‌کار بردن حداکثر یا حداقل ممکن شمرده‌اید. این دو روش شمارش به نامساوی‌هایی منجر خواهند شد که شاید نتیجهٔ دلخواه شما در یک مسئله باشند. در ادامه دو نمونه از این مسئله‌ها را ذکر می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱۱: n زیرمجموعه از مجموعهٔ ۱۲ عضوی A انتخاب کرده‌ایم به‌طوری که هر عضو A دقیقاً در ۳ زیرمجموعه عضو است و هر دو زیرمجموعه حداکثر یک عضو مشترک دارند. حداقل n را بیابید.

راه‌حل: تعداد زوج زیرمجموعه‌های متقاطع (با اشتراک ناتهی) را می‌شماریم. هر عضو A در ۳ زیرمجموعه آمده است. پس تعداد زوج زیرمجموعه‌های متقاطع در کل برابر است با: $N_1 = 12\binom{3}{2} = 36$. از طرف دیگر، هر دو زیرمجموعه یا اشتراکی برابر تهی دارند یا در یک عضو مشترک هستند. پس: $\binom{n}{2} \geq 36$ که نتیجه می‌دهد: $n \geq 9$.

مسئله‌های ۱۱ و ۹ شباهت‌هایی با هم دارند. آیا می‌توانید ارتباط آن‌ها را پیدا کنید؟

مسئلهٔ ۱۲: فرض کنید یک چندوجهی محدب، v رأس، e یال و f وجه داشته باشد. ثابت کنید: $3v \leq 2e$ و $3f \leq 2e$.

اثبات: از هر رأس چند یال می‌گذرد؟ می‌دانیم در یک چندوجهی محدب از هر رأس، حداقل ۳ یال می‌گذرد (۲ یال امکان ندارد!) اگر تعداد یال‌های مجاور هر رأس را بشماریم و عددهای حاصل را جمع کنیم، حاصل عددی بزرگ‌تر یا مساوی 3v خواهد بود. اما از طرف دیگر، هر یال در این شمارش دقیقاً ۲بار شمرده می‌شود. در نتیجه: $3v \leq 2e$.

اثبات نامساوی دوم نیز به طریق مشابه انجام می‌شود، با توجه به این نکته که هر وجه حداقل ۳ یال دارد.

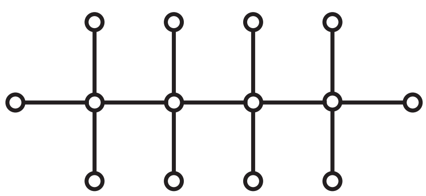
در این مقاله سعی کردیم کاربردهای متفاوت روش شمارش مضاعف را در اثبات اتحادها و حل مسئله‌های شمارشی بیان کنیم. در پایان چهار مسئله به‌عنوان تمرین آورده‌ایم و خواننده را به لذت کشف راه‌حل آن‌ها دعوت می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱۳: مجموع اعضای هر زیرمجموعهٔ A از $X=\{1,2,...,n\}$ را با S(A) نمایش می‌دهیم. برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A، S(A) را محاسبه می‌کنیم و سپس تمام اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم. ثابت کنید حاصل برابر است با: $S = n(n+1).2^{n-2}$.

مسئلهٔ ۱۴: هر دانش‌آموز از مدرسهٔ A دقیقاً با ۴ دانش‌آموز از مدرسهٔ B آشناست و هر دانش‌آموز از B نیز با ۴ دانش‌آموز از A آشناست. ثابت کنید تعداد دانش‌آموزان دو مدرسه برابر است.

مسئلهٔ ۱۵: ده خط مترو برای شهری طراحی شده است به‌طوری که هر دو خط دقیقاً در یک ایستگاه متقاطع باشند. اگر در هر ایستگاه مترو، حداکثر ۳ خط مترو بتوانند تقاطع داشته باشند، حداقل چند ایستگاه مترو در این شهر لازم است؟

مسئلهٔ ۱۶: در گراف زیر چند زوج رأس با فاصلهٔ ۳ وجود دارد؟



راهنمایی‌ها

مسئلهٔ ۴. از بین n فوتبالیست می‌خواهید یک تیم k نفره انتخاب کنید. فوتبالیست A خیلی تکنیکی است، اما بداخلاق است. اگر شما بخواهید تیم را انتخاب کنید. A را انتخاب می‌کنید یا نه؟ این فوتبالیست کمک می‌کند تا اتحاد پاسکال را اثبات کنید.

مسئلهٔ ۵. در یک جمع n+1 نفره هر دو نفر با هم یک‌بار دست داده‌اند. چندبار عمل دست دادن اتفاق افتاده است؟ دوجور بشمارید.

مسئلهٔ ۶. از مجموعهٔ $X=\{1,2,...,n\}$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی انتخاب کنید، به‌طوری که بزرگ‌ترین عضو آن k باشد. k را از ۱ تا n تغییر دهید و... .

مسئلهٔ ۷. از میان اعضای یک تیم n نفره و یک تیم m نفره می‌خواهید تیمی k نفره انتخاب کنید. دوجور بشمارید.